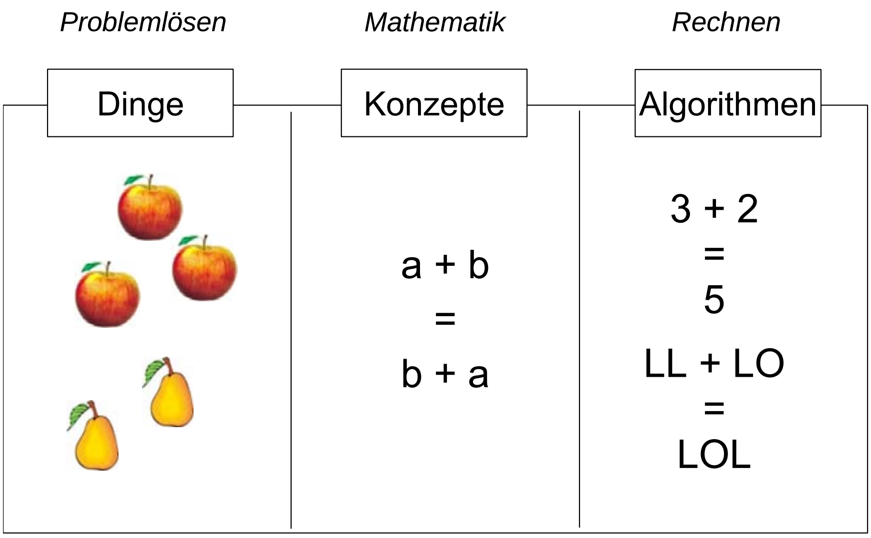
Hansruedi Kaiser
Fachstelle Integrative Fördermassnahmen
hansruedi.kaiser@ehb-schweiz.ch

Spezielle Eigenschaften mathematischer Schemata

1 Drei Welten

Ein zentrales Problem bei mathematischen Aufgaben ist, dass sich die Lernenden gleichzeitig und koordiniert in drei Welten bewegen müssen:

- **Dinge:** Sofern es nicht um reine Rechnungsübungen geht, steht im Zentrum immer eine reale Aufgabe mit realen „Dingen“, die gelöst werden muss. Man sollte wissen, wie viele Karotten einzukaufen sind, damit nach der Verarbeitung genügend zu Essen auf den Tisch kommt. Man sollte wissen, wie breit man einzelne Bretter zuschneiden muss, damit sie verleimt eine Platte für den Esstisch ergeben. Etc. In der Welt der Dinge spielen viele Aspekte hinein, die nichts mit Mathematik und Rechnen zu tun haben. Gerade diese Aspekte können aber oft helfen, Lösungen auf ihre Plausibilität zu kontrollieren.
- **Konzepte:** Diese Aufgabe muss in ein mathematisches Modell übersetzt werden. Anstelle bestimmter, für die Problemlösung wichtigen Eigenschaften der „Dinge“ treten Zahlen. Zahlen sind wie Legobausteine. Wenn man sie geschickt kombiniert, lassen sich damit reale Problemsituationen mehr oder weniger getreu abbilden. Sie haben gewisse, fixe Eigenschaften und kennt man die, kann man das Modell der Problemsituation so „drehen“, dass die Lösung leicht zu erkennen ist. Mathematik kommt ohne konkrete Grössen aus, d.h. die modellierten Eigenschaften können als abstrakte Zahlen (oft geschrieben als Buchstaben) dargestellt werden. D.h. in der Mathematik spricht man über Zahlen, sonst braucht man sie.



- **Algorithmen:** Als Lösungen für konkrete Probleme sind aber meist konkrete Grössen gefragt. Um diese zu errechnen müssen deshalb die Zahlen im mathematischen Modell durch konkrete Grössen ersetzt werden. Diese werden in einer bestimmten Notation geschrieben. Bei uns üblich ist das Dezimalsystem. Abhängig von der Notation und vom gewählten mathematischen Modell lassen sich dann bestimmte Rechentechniken einsetzen, um die Grösse zu erhalten, welcher der Lösung entspricht. Diese Rechentechniken sind Prozeduren, die ihre eigenen, vom gewählten mathematischen Modell unabhängigen Schwierigkeiten und Stolpersteine bieten (z.B. Zehnerübergänge).

Hansruedi Kaiser
Fachstelle Integrative Fördermassnahmen
hansruedi.kaiser@ehb-schweiz.ch

Die Aufgaben der Lernenden sind also vielfältig. Sie müssen mindestens:

- Jede dieser drei Welten ausreichend beherrschen (Problemlösen, Mathematisieren, Rechnen).
- Die drei Welten im Rahmen einer Problemlösung koordinieren.

2 Die drei Welten im Beispiel

Anhand der folgenden Aufgabe lassen sich die drei Welten und ihr Zusammenspiel illustrieren:

> „Die gewünschte Teigtemperatur beträgt 24° C. Die Kneterwärmung 5° C. Der Vorteig war über Nacht im Kühlraum und hat eine Temperatur von 8° C. Die Backstube weist eine Temperatur von 25°C auf und das Mehl aus dem Silo hat 15° C. Wie warm muss geschüttet werden?“

In der Welt der Dinge geht es um die Herstellung eines Teiges. Zutaten werden zusammengeschüttet und dann verknetet. In Abbildung 1 ist diese Welt mit den Stäbchen, Knöpfe, Gegenstände und gelben Zetteln auf der linken Seite repräsentiert. Entsprechend den zwei Schritten des Prozesses kann man sich auch die Entstehung der der Endtemperatur als zweischrittigen Prozess vorstellen. Beim ersten Schritt entsteht aus den Temperaturen der verschiedenen Zutaten (Wasser, Mehl, Vorteig und Raumtemperatur!) eine „Mischtemperatur“. Als zweiter Schritt findet dann beim Kneten des Teiges noch eine Erwärmung statt, verursacht durch die Reibung.

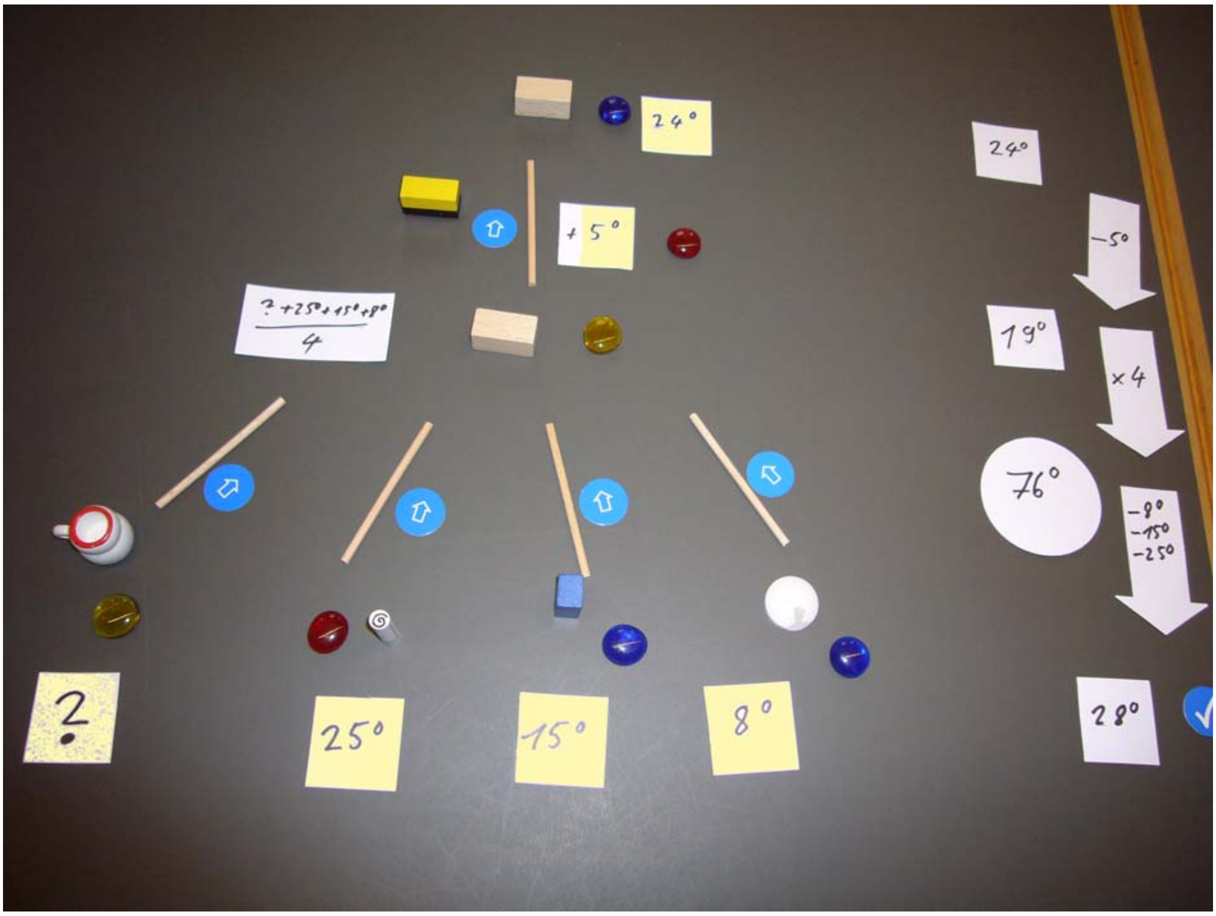


Abbildung 1: Rechnen mit Temperaturen beim der Teigherstellung.

Die Eigenschaften der einzelnen Dinge erlauben ein bisschen abzuschätzen, wie das Resultat ausfallen wird. Gewisse Temperaturen sind deutlich tiefer als der Zielwert (15° und 8°; blaue Knöpfe), zwei andere sind nur wenig zu hoch (25° und +5°; rote Knöpfe), so dass die die notwendige Temperatur für das Wasser wohl über 24° liegen dürfte.

Die weissen Zettel auf der linken Seite stehen für die Welt der Konzepte. Jedem der beiden Schritte ist ein mathematisches Modell zugeordnet. Bei der Temperaturmischung im ersten Schritt wird das Modell Durchschnitts eingesetzt, bei dem alle beteiligten Temperaturen mit gleichem Gewicht eingehen. Für die Kneterwärmung im zweiten Schritt ist es eine einfache Addition, bei der die Temperatur durch die Erwärmung entsprechend erhöht wird.

An dieser Stelle wird klar, dass die Darstellung der Welt der Dinge durch die verwendeten Konzepte beeinflusst wird. Die Temperatur der Backstube wirkt in Wirklichkeit nicht nur beim Zusammenschütten der „Zutaten", sondern auch, oder sogar vor allem, während des Knetens. Aber das währe mathematisch schwieriger zu modellieren und offenbar hat sich diese Vereinfachung praktisch bewährt.

Die mathematische Modellierung ist auch an einem zweiten Punkt nur eine Annäherung an die Verhältnisse in der Welt der Dinge. Beim verwendeten Modell des Durchschnitts gehen alle Temperaturen der Zutaten mit Gleichem Gewicht ein. Das ist sicher nicht ganz exakt, denn der eher kleine Vorteig beeinfluss die Endtemperatur sicher weniger als das Mehl und das Wasser. Aber offenbar hat sich auch hier diese Vereinfachung praktisch bewährt.

Ganz rechts in Abbildung 1 findet sich dann die „Welt der Algorithmen", des Rechnens, wo klar wird, wie aus dem mathematischen Modell ein Rechnungsvorgang wird. Ist die Endtemperatur vorgegeben, muss selbstverständlich von dieser ausgehend rückwärts gerechnet werden. Aus der Addition bei der Kneterwärmung wird eine Subtraktion und die Auflösung des Durchschnitts führt zu einer Multiplikation mit der Anzahl Zutaten mit anschliessenden weiteren Subtraktionen. Betrachtet man nur den Algorithmus, sind sowohl die Subtraktion wie die Multiplikation intuitiv nicht einfach nachvollziehbar. Die Subtraktion verlangt, dass „Dinge", die beim Herstellungsprozess hinzukommen, weggenommen werden müssen. Und die Multiplikation scheint nahezulegen, dass das Resultat von der Anzahl Zutaten abhängt (!?) und dass es umso höher ist, je mehr Zutaten verwendet werden (!?).

Bei der Subtraktion hilft vielleicht die Überlegung, dass ja vom Endresultat her rückwärts gerechnet wird, und dass die Addition, das Hinzufügen daher umkehrt werden muss. Eine solch einfache Überlegung ist aber bei der Multiplikation der Anzahl Zutaten nicht in Sicht. Dies illustriert schön, dass stabiles Rechnen nur möglich ist, wenn es den Lernenden gelingt, die drei Welten zu vernetzen. Wird nur der Algorithmus eingeführt, dann besteht die Gefahr, dass manche Lernende plötzlich addieren anstatt zu subtrahieren. Und auf jeden Fall wird für sie die Multiplikation mit der Anzahl „Zutaten" völlig unverständlich sein und sie werden sie einfach als ein Akt „mathematischer Magie" akzeptieren müssen.

3 Die Unabhängigkeit der drei Welten

Bei den drei Welten handelt es sich um unabhängige Gebilde, welche je ihrer eigenen Logik folgen. Es ist deshalb durchaus möglich, in einer der drei Welten etwas zu tun, das keine Entsprechung in einer oder gar zu beiden anderen Welten hat. Dies lässt sich leicht anhand eines Beispiels illustrieren (nach Baruk, S. (2004). Si 7 = 0. Quelles mathématiques pour l'école? Paris, Odile Jacob. S. 13 ff)

Problem: An einem Strassenfest soll mit einem Zaun ein Gebiet für ein Strassenschachspiel abgegrenzt werden. Es steht ein flexibler Zaun von 16 m Länge zur Verfügung. Das Schachbrett soll möglichst gross sein und an beiden Enden soll innerhalb des Zauns noch ein Streifen von 1 m Breite für die Spieler und die gefangenen Figuren frei bleiben.

Hansruedi Kaiser
Fachstelle Integrative Fördermassnahmen
hansruedi.kaiser@ehb-schweiz.ch

Mathematisches Modell: Es geht um die Dimensionen eins Rechtecks mit der Breite **b** und der Länge **l**. Der Umfang (**u**) ist vorgegeben. Da das Schachbrett ein Quadrat sein wird, ist ebenso vorgegeben, dass die Länge um 2 mal einen Rand (**r**) grösser sein soll, als die Breite. Das ergibt folgendes Modell:

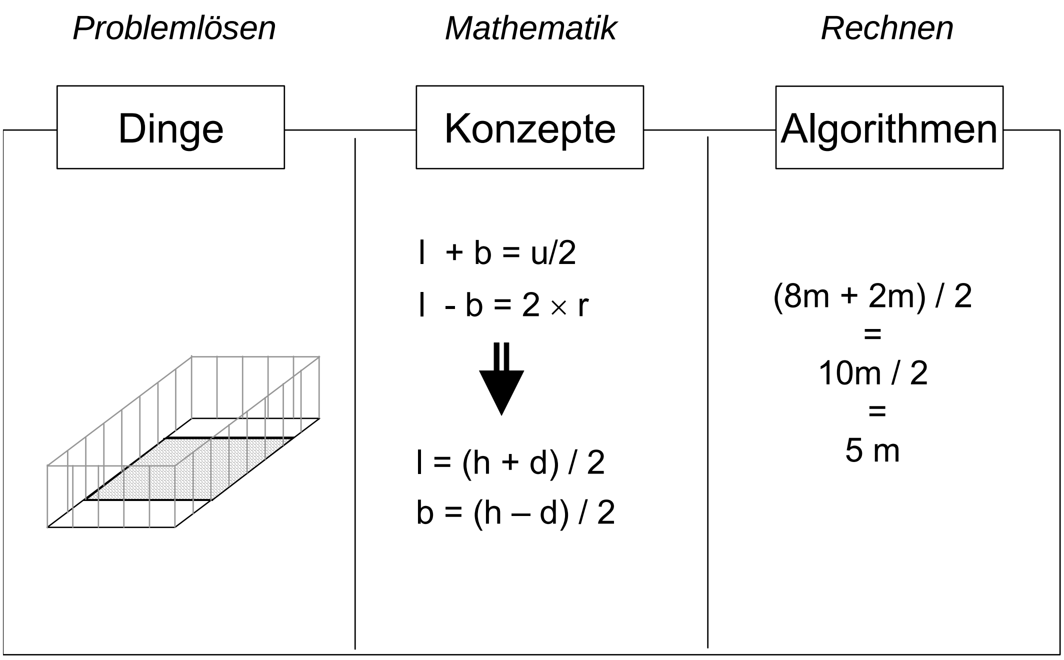
$$l + b = u/2$$
$$l - b = 2 \times r$$

„Drehen“ des Modells: Zur Vereinfachung der Formeln soll u/2 = **h** (halber Umfang) und 2 × r = **d** (Differenz) geschrieben werden. Das Gleichungssystem mit zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten kann umgeformt werden. Man erhält:

$$l = (h + d) / 2$$
$$b = (h - d) / 2$$

Rechnen : Ausrechnen ist in diesem Fall relativ einfach. Setzt man die Werte für **h** und **d** ein, erhält man:

l = 5 m
b = 3 m



Das mathematischen Modell mit anderen Werten: Das mathematische Modell aus dem Beispiel oben lässt sich auch für andere Werte nutzen, z.B. für einen längeren Zaun (**u** = 24 m) und mehr Platz zum Hinstehen (**r** = 2 m). Als Resultat erhält man **b** = 4, **l** = 8. Was geschieht, wenn man für **u** 20 m und für **r** 6 m einsetzt? Dem mathematischen Modell ist das egal. Es lässt sich auch ein Resultat berechnen:

l = 11 m
b = -1 m

Dieses Resultat macht aber als Lösung des Problems keinen Sinn!

Ein etwas anderes Problem: Am selben Fest so auch ein Bereich für das Glücksfischen abgesteckt werden. Dabei kommt ein zweiter, wieder 16 m langer Zaun zum Einsatz. Den Organisatorinnen des Glücksfischens ist die genaue Form des eingezäunten Bereichs gleichgültig. Sie hätten aber gern eine Fläche von 12 m^2, damit alle Preis dicht gepackt nebeneinander Platz haben.

Hansruedi Kaiser
Fachstelle Integrative Fördermassnahmen
hansruedi.kaiser@ehb-schweiz.ch

Mathematisches Modell: Um die Berechnung zu vereinfachen (!), wird beschlossen, auch hier ein Rechteck abzugrenzen; Länge **l**, Breite **b**, Umfang **u** und Fläche **f**. Das ergibt folgendes Modell:

$l + b = u/2 \quad (= h)$
$l \times b = f$

„Drehen“ des Modells: Auch hier kann das Gleichungssystem mit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten umgeformt werden. Allerdings sind die Gleichjungen nicht linear und entsprechend sehen die Formeln etwas komplizierter aus:

$b = (h - \sqrt{(h^2 - 4 \times f)})/2$
$l = (h + \sqrt{(h^2 - 4 \times f)})/2$

Rechnen: Ausrechnen ist hier zwar etwas schwieriger, aber führt trotzdem geradlinig zum Resultat:

$b = 2$ m
$l = 6$ m

Das mathematischen Modell mit anderen Werten: Das Modell lässt sich auch hier für andere Werte nutzen. Der Wunsch nach einer etwas grösseren Fläche, nämlich 16 m^2, führt zum Beispiel zu einem Quadrat mit **b** = **l** = 4 m. Was geschieht aber bei **u** = 20 m und **f** = 26 m^2? Das führt beim Rechnen zur Stelle, wo $\sqrt{(-4)}$ auszurechnen wäre. Mathematisch ist das kein Problem, denn auch die Wurzel aus -4 ist eine Zahl! Aber „rechnen“ kann man das mit den üblichen Prozeduren nicht, denn die kennen keine Notation für diese Zahl. Und eine Lösung für das ursprüngliche Problem ergibt sich daraus auch nicht.

Wie das Beispiel zeigt, ist es notwendig, die drei Welten aktiv zu koordinieren. Nur weil man in einer der drei Welten etwas verändern kann, heisst das noch lange nicht, dass diese Veränderung in den beiden anderen Welten eine sinnvolle Entsprechung hat.