Hansruedi Kaiser
Fachstelle Pädagogische Fördermassnahmen
hansruedi.kaiser@bbt.admin.ch

Arbeiten mit den drei Welten

Die drei Welten (Problemlösen, Mathematik, Rechnen) eignen sich, um „Stoff“ aus dem Bereich Rechnen/Mathematik zu analysieren. Sie ermöglichen es, einerseits differenziert auseinander zu nehmen, was die Lernenden alles wissen müssen (situativ, deklarativ, prozedural), und andererseits den „Stoff“ auf das Wesentliche zu fokussieren.

Das Folgende ist der Versuch einer Anleitung zu solch einer Analyse. Die fünf vorgeschlagenen Schritte ergeben einen möglichen Ablauf der Analyse. Oft wird es aber sinnvoll sein, zwischen den Schritten hin und her zu springen bzw. den einen oder anderen Schritt vorzuziehen.

1 Einfüllen

Beginnt man ein neues „Stoffgebiet“ zu analysieren, geht es als erstes einmal darum, alles zusammenzutragen, was man darüber weis. Welches sind typische Aufgaben, die in diesem Zusammenhang auftreten? Welche Prozeduren benutzt man selbst, um solche Aufgaben zu lösen? Welche Prozeduren werden den Lernenden typischerweise beigebracht? Was ist das mathematische Modell, das hinter diesen Prozeduren steht?

> Beispiel: Dreisatz
>
> **Problemlösen**: Typische Aufgaben sind „Textaufgaben“ der folgenden Form „Drei Meter Kabel kosten 3.60 Fr.. Was kosten 5 Meter?“ bzw. „Zwei Personen können die Arbeit in 3 Stunden erledigen. Wie lange brauchen 5 Personen?“.
>
> **Mathematik**: Auf einer ganz abstrakten Ebene geht es bei all diesen Aufgaben immer um vier Grössen (im Folgenden a, b, c und d genannt). Drei dieser Grössen sind jeweils bekannt (in den beiden Beispielen: 3 m, 3.60 Fr., 5 m bzw. 2 Personen, 3 Std., 5 Personen), die vierte soll berechnet werden. Es ist immer so, dass das Verhältnis zweier dieser Grössen gleich dem Verhältnis der beiden anderen Grössen ist. Das allgemeinste mathematische Modell ist also a/b = c/d. Die Hauptschwierigkeit bei der Benutzung dieses Modells ist es, die Grössen in der Aufgabe so den Grössen im Modell zuzuordnen, dass das Modell die Verhältnisse in der Aufgabe korrekt abbildet.
>
> Das Modell lässt sich immer so umformen, dass die gesuchte Grösse auf der einen Seite der Gleichung steht, die drei anderen Grössen auf der anderen Seite. Wenn a die gesuchte Grösse ist, dann sieht das so aus:
>
> $$a = \frac{c * b}{d}$$

Hansruedi Kaiser
Fachstelle Pädagogische Fördermassnahmen
hansruedi.kaiser@bbt.admin.ch

Rechnen: Eine bekannte Prozedur ist das Schema, wie man es etwa auch im Lehrmittel für den Detailhandel findet (S. 121): „① Schreiben Sie die gesuchte Grösse nach rechts; ② schreiben Sie die gegebene Grösse links; ③ beginnen Sie mit dem Bedingungssatz; ④ ziehen Sie den Schluss auf eine Einheit; ⑤ formulieren Sie den Fragesatz; ⑥ multiplizieren und dividieren Sie aus (mit dem Rechner!)"

②	①	
③	③	⑤
④	④	
⑤		

Wichtig ist es, sich beim Zusammentragen klar zu machen, wie denn die verschiedenen Teile zusammenhängen. Oft wird es dazu notwendig sein, zwischen typischen Aufgaben und der (oder den) Prozeduren hin und her zu springen und sich zu überlegen, warum denn die Prozedur funktioniert. Im Beispiel hier entsprechen die Grössen ③, ④ und ⑤ auf der rechten Seite des Kreuzes in der Prozedur den Grössen c, d und b im Modell. Die Prozedur ist ein Versuch, den Lernenden gleichzeitig in zwei Punkten eine Hilfe anzubieten. Erstens leitet sie an, wie sie die Grössen aus der Aufgabe den Grössen im mathematischen Modell zuzuordnen sind. Zweitens gibt sie eine Hilfe, wie die Grössen aufgeschrieben werden können, so dass das Resultat ohne weiter Umformung zu errechnen ist. (*Hier drängt sich mir die Frage auf, ob das nicht ein bisschen des Guten zuviel ist.*)

2 Echte Aufgaben suchen

Die als „Stoff" vorgesehenen Prozeduren (und die damit verbundenen mathematischen Modell) sind typischerweise sehr mächtige Werkzeuge, die eine grosse Klasse von Aufgaben bewältigen können. Sie sind daher notwendigerweise auch sehr abstrakt und der Vorgang der Zuordnung der Grössen aus der Problemsituation zu den Grössen im mathematischen Modell bzw. in er Prozedur nicht einfach.

Beispiel: Im Beispiel ist der „Stoff" nach einer bestimmten Prozedur benannt, die vom Bedingungssatz („Drei Meter Kabel kosten 3.60 Fr.) über den Schluss auf die Einheit („Ein Meter Kabel kostet ...") zum Fragesatz („Was kosten 5 Meter?") geht. Alternativ wird von „direkter" und „indirekter Proportion" gesprochen. Damit wird der „Soff" nach dem mathematischen Modell („a/b = c/d") benannt, unterschieden danach, welche Grössen aus der Aufgabe im Modell wo einzufällen sind.

Als nächstes ist es deshalb wicht abzuklären, ob es überhaupt zwingend ist, von den Lernenden diesen grossen Abstraktionsschritt zu verlangen. Dazu ist es notwendig, die bisher unter „Problemlösen" gesammelten typischen Aufgaben kritisch zu sichten und auf die Suche nach echten Aufgaben aus dem Berufs- und Alltagsleben der Lernenden zu gehen. Idealerweise befragt man hier die Lernenden selbst. Um sich auf diesen Schritt vorzubereiten kann es aber auch sinnvoll sein, den eigenen Alltag nach Aufgaben abzusuchen.

> **Beispiel**: Echte Beispiele für Problemsituationen im Alltag, bei denen ein „Dreisatz" gebraucht wird, sind gar nicht so einfach zu finden. Die Beispiele, die mir einfallen, haben immer etwas mit Verpflegung zu tun (!?). Z.B. „Letztes Mal, als wir an einem Regattawochenende für die Mitglieder des Ruderclubs gekocht haben, wurden gut 5 Kilo Spaghetti gegessen. Damals waren etwa 30 Personen dabei. Dieses Mal werden es nur 22 sein." Oder: „Als wir letztes Mal Besuch hatten, standen am Schluss 4 leere Weinflaschen in der Küche. Wir waren 7 Personen. Heute werden wir 9 Personen sein."

Arbeitet man mit echten Beispielen anstelle von Textbuchaufgaben wird sich übrigens immer zeigen, dass zur Bewältigung dieser Aufgaben neben dem reinen „Rechnen" viele andere Aspekte für eine sinnvolle Lösung von Bedeutung sind (z.B. war es an jenem Regattawochenende sehr heiss und meisten Ruderer sagten, dass sie kaum Hunger hätten. Für dieses Wochenende ist hingegen eher kühlere Witterung angesagt.)

Arbeitet man direkten mit Aufgaben/Problemen, welche die Lernenden mitbringen, kann man auch gleich die Lernenden auffordern, diese Aufgaben mit ihren eigenen Mitteln zu lösen (vgl. der Schritt „Konstruktion" bei Lütje-Klose). Vermutlich wird man dabei das eine oder andere Mal überrascht feststellen können, dass die Lernenden solche Aufgaben kompetent lösen können. Sehr häufig werden sie sich dabei mit vernünftigen Abschätzungen behelfen (etwa beim Beispiel mit den Weinflaschen „Oh, das gibt etwa eine Flasche für zwei Personen. Also brauchen wir heute eine mehr. Als Reserve nehme ich zwei."). Um zu verdeutlichen, warum es sinnvoll ist, manchmal etwas genauer zu rechnen, wird man deshalb die Situation etwas zuspitzen müssen (z.B. anstelle von 7 bzw. 9 Personen ein Bankett mit 700 bzw. 900 Personen; vgl. die Einführung eins akzeptierten Problemträgers bei Wildt).

3 Lernergerechte Situationsklassen bilden

Als nächstes geht es darum, die gefundenen Anwendungen zu typischen Anwendungssituationen zu bündeln. Die Beispielsituation mit den Spaghetti ist ja typisch für eine ganze Klasse von Situationen, welche die Lernenden alle bewältigen sollten. Es geht also darum den Transferkreis zu finden, den Kreis von Situationen, auf welche die Lernenden das gelernte Vorgehen übertragen sollen.

Dieser Kreis kann mehr oder weniger gross sein. Im Prinzip definiert auch „Es bei all diesen Aufgaben immer um vier Grössen von denen jeweils drei bekannt sind und bei denen das Verhältnis zweier dieser Grössen gleich dem Verhältnis der beiden anderen Grössen ist" einen solchen Situationskreis – nur einen sehr grossen. Am anderen Ende steht die ganz konkrete Situation mit den Spaghetti für das Regattawochenende – ein sehr kleiner Kreis mit nur einer Situation. Irgendwo dazwischen gilt es einen Kreis mittleren Umfanges zu finden, der gross genug ist um nützlich zu sein (nur eine einzige, ganz konkrete Situation zu beherrschen bringt wenig) aber klein genug, dass die Sache für die Lernenden anschaulich und konkret genug bleibt.

Wo diese optimale Grösse des Situationskreises liegt, hängt von den „intellektuellen Kapazitäten" (was auch immer das ist) der Lernenden ab. Man kann versuchen, dies selbst abzuschätzen. Eine gute Möglichkeit ist es aber auch, dies zusammen mit den Lernenden herauszuarbeiten. Man bespricht dazu die gesammelten Beispiele und versucht sie in Gruppen einzuteilen, so dass die Gemeinsamkeiten in jeder Gruppe für die Lernenden verständlich sind.

> **Beispiel**: Im Beispiel könnte es sein, dass eine gute, abgrenzbare Klasse von Situationen sich mit dem Titel „Verbrauch aufgrund von Erfahrungen abschätzen" umschreiben lässt. Diese Klasse liesse sich illustrieren einerseits durch die

Beschreibung einer typischen Situation und andererseits durch die Skizzierung des Situationskreises durch einige Merkmale:

Typische Situation (wie oben): „Letztes Mal, als wir an einem Regattawochenende für die Mitglieder des Ruderclubs gekocht haben, wurden gut 5 Kilo Spaghetti gegessen. Damals waren etwa 30 Personen dabei. Dieses Mal werden es nur 22 sein."

Situationskreis: Die Situationen sind immer durch folgende vier Punkte charakterisiert:

Ein alter Fall mit
- einer Menge von „Dingen"
- einer Anzahl „Verbraucher", welche diese „Dinge" verbrauchen

Ein neuer Fall mit
- einer (anderen) Anzahl „Verbraucher"
- für die man wissen möchte, wie viele Dinge sie verbrauchen werden

Weitere solche Situationsklassen, die man ebenso beschreiben könnte, sind denkbar (z.B. „Es wird nach X% von etwas gefragt"). Ziel wäre es, die echten Anwendungen, welche die Lernenden in ihrem beruflichen und privaten Alltag antreffen vollständig mit solchen für sie verständlichen Klassen abzudecken.

4 Mathematische Modell und Prozeduren schaffen

Zu jeder Situationsklasse geht es dann darum, in einem abschliessenden Schritt ein passendes mathematisches Modell und eine geeignete Prozedur zu schaffen. Sowohl Modell und Prozedur sollten gerade so abstrakt sein, dass sie alle Situationen der Klasse abdecken können. Und sowohl Modell wie Prozedur sollten die wesentlichen Charakteristika der typischen Situationen erkennbar lassen. Es geht also nicht darum, ein mathematisch möglichst elegantes Gebilde zu schaffen, sondern etwas, das für die Lernenden erkennbar ein Werkzeug ist um die Probleme der behandelten Klasse von Situationen zu lösen.

Beispiel:

Mathematik: Der zentrale Zusammenhang beim „Verbrauch aufgrund von Erfahrungen abschätzen" lässt sich zum Beispiel durch folgende zwei, ineinander umwandelbare Formeln darstellen:

$$\text{Verbrauch } \mathbf{eines} \text{ Verbrauchers} = \frac{\text{Verbrauch von } \mathbf{n} \text{ Verbrauchern}}{\mathbf{n}}$$

$$\text{Verbrauch von } \mathbf{n} \text{ Verbrauchern} = \text{Verbrauch } \mathbf{eines} \text{ Verbrauchers} * \mathbf{n}$$

Diese beiden Formeln fassen die wichtige Grundidee, dass nämlich der Verbrauch eines Verbrauches der Dreh- und Angelpunkt ist, mit der sich all diese Aufgaben angehen lassen, in eine mathematische Sprache.

Prozedur: Im Prinzip besteht die Prozedur darin, die konkreten Grössen der Reihe nach in die beiden Formeln einzusetzen. Da ein gutes Formular das Leben aber meistens erleichtert, hier ein Versuch das Schema aus Abschnitt 1 zu konkretisieren und anzupassen:

Variante 1

Verbraucher	Verbrauch
① „alt, gemessen, letztes Mal“	② „alt, gemessen, letztes Mal“
1	② -- = ③ ①
④ „neu, erwartet, dieses Mal“	③ * ④ =

Für den „Spaghetti Fall“ ergibt das eingefüllt:

Verbraucher	Verbrauch
30	5 kg
1	5 kg ------ = 0.16666 kg 30
22	0.1666 kg * 22 = 3.6666 kg

Variante 2

Verbraucher	Verbrauch
① „alt, gemessen, letztes Mal“	② „alt, gemessen, letztes Mal“
1	② --- ①
④ „neu, erwartet, dieses Mal“	② --- * ④ = ①

In beiden Varianten sind an Stelle von ①, ② und ④ die entsprechenden Werte aus der Problemsituation einzusetzen. Sie unterschieden sich dadurch, dass in der zweiten Variante eine einzige Rechnung entsteht (② / ① * ④), die man „in einem Zug“ ausrechnen kann. In der ersten Variante wird mit einem Zwischenresultat (③) gearbeitet. Die Spalten sind entsprechend dem Grundmodell der Aufgabenklasse beschriftet. „Alt, gemessen, letztes Mal“ und „neu, erwartet, dieses Mal“ sind Erinnerungshilfen, dass zuerst mit den Grössen aus der zurückliegenden Fall, wo man Verbraucher und Verbrauch kennt, rechnen muss, um dann auf den neunen Fall zu schliessen.

Beide Varianten versuchen die Logik des mathematischen Modells sichtbar zu erhalten. Unter anderem werden in Variante 2 am Schluss nicht ② und ④ auf denselben Bruchstrich genommen, weil nach der Logik des Modells zuerst dividiert wird (um den Verbrauch eines Verbrauches zu erhalten) und erst dann die Multiplikation folgt.